

O NECESSÁRIO E POSSÍVEL NAS TEORIAS FORMALIZADAS. Ana Cláudia de Jesus Gólzio, Hércules de Araújo Feitosa. – Matemática – Matemática – Departamento de Matemática – Faculdade de Ciências – *Campus* de Bauru.

Questões relacionadas às modalidades, mais especificamente, conceitos de necessidade e de possibilidade, sempre estiveram presentes no cotidiano. Alguns filósofos dedicaram atenção especial ao significado desses termos. Aristóteles (384-322 a. C.), filósofo grego, elaborou uma teoria de frases declarativas modais e de silogismos modais.

Para Aristóteles, uma frase declarativa modal é uma frase que contém a palavra “necessário” ou a palavra “possível” ou alguma palavra equivalente a essas duas. Já um silogismo modal é aquele em que pelo menos uma das premissas é uma frase declarativa modal. Uma geração mais tarde, alguns filósofos megáricos, como Diodoro Cronus, também discutiram questões relacionadas às modalidades. Com tais feitos, Aristóteles e Diodoro deram início a um caminho novo, que levou, após alguns séculos, ao desenvolvimento da lógica modal.

Depois desses primeiros estudos, durante séculos, houve uma grande ausência de trabalhos significativos no campo da modalidade. Até que, finalmente, no século XX o interesse pela lógica modal foi retomado com os trabalhos de C. I. Lewis (1883-1964).

O interesse de Lewis não era investigar questões relacionadas às modalidades, mas sim em encontrar uma implicação mais rigorosa que a implicação material da lógica clássica. Em sua obra “Survey of Symbolic Logic” de 1918 (Kneale, Kneale, 1991), propõe uma teoria em oposição à teoria da implicação material proposta por Whitehead e Russell nos “Principia Mathematica” (1910, 1912 e 1913). Para Lewis uma proposição implica outra em sentido estrito se, e somente se, é impossível que o antecedente seja verdadeiro e o conseqüente falso. Essa definição de Lewis foi baseada na obra “Symbolic Logic and its Applications” de H. MacColl, publicada em 1906 (Kneale, Kneale, 1991).

O uso da implicação material na lógica clássica gerou, ao longo dos séculos, alguns paradoxos que também serviram de inspiração para Lewis. Devemos mencionar ainda que Ruth B. Marcus (1946) também contribuiu com o desenvolvimento da lógica modal, em seu trabalho sobre o cálculo modal de predicados.

O pluralismo lógico, isto é, a admissão da existência de mais de um sistema lógico correto, está presente no texto de Lewis “Symbolic logic” que marca o nascimento da lógica modal contemporânea em 1932. Essa nova lógica se contrapõe às idéias do monismo lógico, aceitação de apenas um sistema lógico correto, presente na lógica antiga e medieval.

A lógica modal desenvolvida por Lewis considerava apenas aspectos sintáticos, a semântica foi apresentada mais tarde por Saul Aaron Kripke, que baseia seu trabalho no conceito de “mundos possíveis”. Kripke também apresentou resultados importantes sobre as modalidades que envolvem os conceitos *a priori* e *a posteriori*.

De acordo com Kripke, uma verdade é necessária quando é verdadeira em todos os mundos possíveis e uma verdade é possível quando é verdadeira em algum mundo, mas não necessariamente em todos os mundos possíveis. A semântica desenvolvida por ele apresenta uma estrutura que contém essas noções de mundos possíveis. Intuitivamente, esse conceito transmite a idéia de que se existem outros mundos além do que vivemos, e então uma verdade necessária tem que ser verdadeira em todos estes mundos e para uma verdade ser possível, bastaria valer em um deles.

A lógica modal é uma lógica do tipo ampliativa, ou seja, ela estende a lógica clássica. Assim os axiomas, a linguagem, as regras de inferência e as fórmulas bem formadas e válidas da lógica clássica também são válidas na lógica modal.

A lógica modal alética introduz dois novos operadores ao conjunto de operadores da lógica clássica proposicional. Neste trabalho é utilizado o símbolo “ \Box ” para representar o operador de “necessidade” e o símbolo “ \Diamond ” para representar o operador de “possibilidade”. São fórmulas bem formadas os símbolos proposicionais $P_0, \dots, P_i \dots$ (para $i \geq 0$) que representam as fórmulas atômicas. As fórmulas compostas são $\Box A$ (necessário A), $\Diamond A$ (possível A), $\sim A$ (não A), quando A é fórmula e $A \wedge B$, $A \vee B$ e $A \rightarrow B$, para A e B fórmulas quaisquer. O operador “ \leftrightarrow ” pode ser obtido através da definição: $A \leftrightarrow B \text{ df } (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

A semântica dos mundos possíveis de Kripke é apresentada neste trabalho ao considerarmos um modelo como a estrutura $\mathcal{M} = \langle W, R, P \rangle$, em que W é um conjunto não vazio de mundos possíveis, R é

uma relação entre mundos possíveis e P representa uma atribuição de conjuntos de mundos possíveis para sentenças atômicas. A noção intuitiva de modalidade que segue desta definição de estrutura é que uma sentença $\Box A$ é verdadeira em um mundo qualquer α se, e somente se, a sentença A é verdadeira em todo mundo β , tal que $\alpha R \beta$ (o mundo α está na relação R com o mundo β) e $\Diamond A$ é verdadeira em um mundo qualquer α se, e somente se, a sentença A é verdadeira em algum mundo β , tal que $\alpha R \beta$.

A relação R tem propriedades diferentes dependendo do sistema modal considerado. No sistema $S5$ a relação R é reflexiva (para todo α em \mathcal{M} , $\alpha R \alpha$), simétrica (para todos α e β em \mathcal{M} , se $\alpha R \beta$, então $\beta R \alpha$) e transitiva (para todos α , β e γ em \mathcal{M} , se $\alpha R \beta$ e $\beta R \gamma$, então $\alpha R \gamma$). Uma fórmula que é válida em um modelo em que R é reflexiva, simétrica e transitiva pode não ser válida em um modelo em que R é apenas reflexiva e transitiva.

Lewis, em seu livro “Symbolic Logic”, introduziu cinco tipos diferentes de lógica modal, conhecidos como $S1$, $S2$, $S3$, $S4$ e $S5$. O Sistema $S1$ é considerado o mais fraco, devido a ausência de alguns axiomas presentes nos demais. Logo, o sistema $S5$ é o mais forte. Este trabalho apresenta formalmente a semântica de Kripke para o sistema $S5$, a sintaxe de $S5$ e mostra a correção e completude destas duas dimensões de $S5$. Os sistemas $S1$, $S2$, $S3$ e $S4$, são abordados rapidamente, enquanto o sistema $S5$ recebe atenção especial.

Referências Bibliográficas

CARNIELLI, W. A.; PIZZY, C. *Modalità e Multimodalità*. Milão: FrancoAngeli, 2001.

CHELLAS, B. F. *Modal logic: an introduction*. Cambridge: Cambridge university press, 1980.

COSTA, M. M. C. *Introdução à lógica modal aplicada à computação*. Porto Alegre: Instituto de Informática da UFRGS, 1992.

D’OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. A. *História da lógica e o surgimento das lógicas não clássicas*. Unicamp. Centro de lógica, Epistemologia e História da Ciência – CLE. Disponível em: <<http://www.cle.unicamp.br>>. Acesso em 21 mai. 2006.

FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. *Um prelúdio à lógica*. São Paulo: Editora Unesp, 2005.

HAACK, S. *Filosofia das lógicas*. Tradução de C. A. Mortari e L. H. A. Dutra. São Paulo: Editora Unesp, 2002.

KNEALE, W.; KNEALE, M. *O desenvolvimento da lógica*. Tradução de Manuel S. Lourenço. 3º ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1991.

MORTARI, C. A. *Introdução à lógica*. São Paulo: Editora Unesp, 2001.